Asian Journal of Technology and Applied Sciences
ISSN: 2301-xxxx (online) | IF: 10.01 | Vol: 1, issue 1
Available: http://asiansciencejournal.org

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ НЕИЗОТРОПНОЙ ДИФФУЗИИ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИХ РЕШЕНИЙ

Тожиев Тохир Халимович
ФерГУ, доцент кафедры
информационных технологий, кандидат физико-математических наук

Аннотация: В работе исследуется начально-краевая задача для обобщённого уравнения неизотропной диффузии. Построены несмещённые и смещённые оценки решения на основе марковских цепей и метода Монте-Карло. Доказаны свойства мартингальности и конечность дисперсии оценок. Полученные результаты могут быть использованы для численного решения многомерных задач математической физики.

Ключевые слова: начально-краевая задача, ультрапараболических уравнений неизотропная диффузия.

Введение. Методы статистического моделирования, ставшие уже классическими в задачах теории переноса в последнее время получили интенсивное развитие в самых различных областях науки и техники. Большой интерес к статистическому моделированию вызван рядом причин, которые можно условно разделить на два класса. С одной стороны, ([5],[2],[4]) все большее распространение получает статистическое описание тех или иных сложных физических процессов, в связи с чем методы статистического моделирования на ЭВМ становятся естественным инструментом исследования, например, в таких областях, как статистическая физика, теория турбулентности, физику -химическая кинетика и ряде других.

С другой стороны,[2] при решении краевой задачи методом Монте-Карло решение $u(x)$ записывается в виде математического ожидания некоторой случайной величины $\xi(\chi): u(\chi) = \mathrm{E}\xi(\chi)$. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_N независимые реализации случайной величины $\xi(\chi)$. Тогда в силу закона больших чисел среднее $\xi = \frac{(\xi_1 + \xi_2 + \ldots \xi_N)}{N}$ при $\mathrm{N} \to$ сходится с вероятностью 1 к $u(x)$. Центральная предельная теорема позволяет получить доверительный интервал для $u(x)$, если $D\xi(\chi) <$.

Для решения многих классических задач математической физики известен ряд вероятностных представлений. Однако они не всегда непосредственно приводят к простому монте-карловскому алгоритму решения задачи. Можно считать, что линейные задачи переноса представляют здесь в известном смысле исключение из общего правила, которому подчиняются многие задачи математической физики и в частности краевые задачи для эллиптических параболических уравнений. Наличие глубокой связи между дифференциальными уравнениями и случайными процессами требует всестороннего ее изучения и открывает перспективу создания новых эффективных численных методов для решения практических задач. Такая связь известна уже давно и вначале хорошо развитая теория дифференциальных уравнений широко использовалась в теории вероятностей.

Asian Journal of Technology and Applied Sciences
ISSN: 2301-xxxx (online) | IF: 10.01 | Vol: 1, issue 1
Available: http://asiansciencejournal.org

Так А.Н. Колмогоров [1] показал в 1931 г., что переходная функция $P(\chi,t,\Gamma)$ - вероятность того, что броуновская частица, вышедшая из точки χ, через время t попадает в множество Г удовлетворяет некоторому параболическому дифференциальному уравнению. По мере своего развития аппарат теории вероятностей стал с успехом применяться при исследовании краевых задач.

Вероятностные представления решений краевых задач в виде континуальных интегралов могут служить основой для вычислений по методу Монте-Карло, однако в связи с ориентацией этого метода на численную реализацию часто целесообразнее построить другую статистическую модель, реализация которой на ЭВМ проще и эффективнее.

II. Постановка задачи. Пусть $D \quad R^m$ – ограниченная область с границей ∂D, $\Omega = D \quad [0,T]$ с границей $\partial\Omega = (\partial D \quad [0,t]) \quad (\bar{D} \quad \{T\})$. Для функций $f(t,x)$, $\psi(t,x)$, $\varphi(x)$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + Lu(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \quad \Omega$$
$$u(t,x) = \psi(t,x), \quad 0 \quad t < T, \quad x \quad \partial D \qquad (1)$$
$$u(T,x) = \varphi(x).$$

Функция $\psi(t,x)$ достаточно гладкая, $\varphi(x)$ и $f(t,x)$ непрерывны, $\psi(t,x) = \varphi(x)$ при $x \quad D$. Через $\tau_{\partial\Omega}$ будем обозначать момент первого выхода процессов $\xi_s(t)$ из области Ω. Приведем аналогичную теорему как для параболических уравнений (см.[1-5], [6], [9]) для решения задачи (1).

Теорема 1. Пусть $\xi_t(\ )$ – диффузионный Марковский процесс с диффузионными коэффициентами $A(t,x)$ и $B(t,x)$, I_C – индикатор события C, $u(t,x)$ – решение задачи (1). Тогда

$$u(t,x) = E_{t,x}\psi(\tau_{\partial\Omega}, \xi_t(\tau_{\partial\Omega}))I_{\tau_{\partial\Omega}<T} +$$
$$+E_{t,x}\varphi(\xi_t(T))I_{\tau_{\partial\Omega}=T} - E_{t,x}\int_t^{\tau_{\partial\Omega}} f(\tau,\xi_t(\tau))d\tau. \qquad (2)$$

Пусть $T > 0$, $G(t,x)$ – достаточно гладкая функция, определённая на $[0,T] \quad R^n$, для которой уравнение $G(t,s) = O$ определяет гладкую поверхность в $[0,T] \quad R^n$, сечения этой поверхности S_t гиперплоскостями, перпендикулярными оси t, являются гладкими поверхностями в R^n, являющимися границей ограниченной односвязной области V_t. Обозначим $V = \{(t,x), t \quad [0,T], x \quad V_t\}$. Будем рассматривать такую граничную задачу в области V:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + Lu(t,x) = f(t,x), \quad t < T, \quad x \quad R^n,$$
$$u(t,x)|_{x \quad S_t} = \psi(t,x), \quad 0 \quad t < T, \qquad (3)$$
$$u(T,x) = \varphi(x).$$

Asian Journal of Technology and Applied Sciences
ISSN: 2301-xxxx (online) | IF: 10.01 | Vol: 1, issue 1
Available: http://asiansciencejournal.org

Функция $\psi(t,x)$ достаточно гладкая, $\varphi(x)$ и $f(t,x)$ непрерывны, $\psi(t,x)=\varphi(x)$ при x S_T. Обозначим через ∂V границу области V (она состоит из поверхностей $\bigcup_t S_t$ и V_T). Через $\tau_{\partial V}$ будем обозначать момент первого выхода процессов $\xi_s(t)$ из области V, $\tau_{\partial V}=T$, если $\xi_s(t)$ V_t для t $[s,T]$, если $G(t,x)>0$ при (t,x) V, то при $\tau_{\partial V}<T$, $\tau_{\partial V}$ совпадает с первым моментом, для которого $G(t,\xi_s(t))=O$. Очевидно $\tau_{\partial V}$ есть момент остановки относительно потока $_t^s$ при вероятностной мере $P_{s,x}$, каково бы ни было x X.

Теорема 2. Пусть $u(t,x)$ – решение задачи (3) Тогда

$$u(x,t)=E_{t,x}\psi(\tau_{\partial V},\xi_t(\tau_{\partial V}))I_{\tau_{\partial V}<T}+$$
$$+E_{t,x}\varphi(\xi_t(T))I_{\tau_{\partial V}=T}-E_{t,x}\,{}_s^T f(u,\xi_t(u))du. \qquad (4)$$

Доказательство. При сделанных предположениях функция $u(t,x)$ допускает продолжение на $[0,T]$ R^n, для которого производные u_t,u_x,u_{xx} ограничены и непрерывны (мы обозначаем продолжение тем же символом). Продолженная функция будет удовлетворять уравнению (1) уже в $[0,T]$ R^n, при этом в $[0,T]$ R^n функция $f(t,x)$ полагается просто равной левой части (2), куда подставлено выбранное продолжение функции $u(t,x)$. Как было доказано в теореме 1, процесс

$$\zeta(t)=u(t,\xi_s(t))-{}_s^t f(\tau,\xi_s(\tau))d\tau$$

является мартингалом. Так как $s<\tau_{\partial V}$ с вероятностью $P_{s,x}=1$, то

$$E_{s,x}\zeta(\tau_{\partial V})=E_{s,x}\zeta(s)$$

Так как $\zeta(s)=u(s,x)$ с вероятностью $P_{s,x}=1$, то

$$u(s,x)=E_{s,x}\zeta(s). \qquad (5)$$

Имеем

$$\zeta(\tau_{\partial V})=u(\tau_{\partial V},\xi_s(\tau_{\partial V}))-{}_s^{\tau_{\partial V}} f(\tau,\xi_s(\tau))d\tau, \qquad (6)$$

при этом $f(u,\xi_s(u))$ совпадает со значениями функции f на области V, именно теми значениями f, которые входят в правую часть (3). Далее, если $\tau_{\partial V}<T$, то $u(\tau_{\partial V},\xi_s(\tau_{\partial V}))=\psi(\tau_{\partial V},\xi_s(\tau_{\partial V}))$, а если $\tau_{\partial V}=T$, то $u(\tau_{\partial V},\xi_s(\tau_{\partial V}))=\varphi(\xi_s(T))$. Подставляя эти значения в (6) из (5), получим (4).

Аналогично теореме 2 доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть функция $v(t,x)$ непрерывна вместе со своими производными v_t,v_x,v_{xx} в замыкании области Ω. Тогда $u(t,x)$ решение задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)+Lu(t,x)+v(t,x)u(t,x)=f(t,x),\quad (t,x)\quad \Omega$$
$$u(t,x)=\psi(t,x),\quad 0\quad t<T,\quad x\quad \partial D \qquad (7)$$
$$u(T,x)=\varphi(x).$$

Asian Journal of Technology and Applied Sciences
ISSN: 2301-xxxx (online) | IF: 10.01 | Vol: 1, issue 1
Available: http://asiansciencejournal.org

представимо в виде

$$u(t,x)=E_{t,x}\psi(\tau_{\partial V},\xi_t(\tau_{\partial V}))\exp\left\{\int_s^T v(s,\xi_t(s))ds\right\}I_{\tau_{\partial V}<T}+$$

$$+E_{t,x}\varphi(\xi_t(T))\exp\left\{\int_s^T v(s,\xi_t(s))ds\right\}I_{\tau_{\partial V}=T}- \qquad (8)$$

$$-E_{t,x}\int_0^T f(s,\xi_t(s))\exp\left\{\int_s^T v(\tau,\xi_t(\tau))d\tau\right\}du.$$

III.Моделирование Марковских процессов согласованным с вероятностным представлением.Моделирование решений стохастических дифференциальных уравнений является одним из мощных средств исследования случайных процессов ([5], [6]). В данном работе исследуем диффузионные процессы как решения стохастических дифференциальных уравнений. Рассмотрим системы стохастических дифференциальных уравнений, которым удовлетворяет диффузионный процесс $\xi(t)$.

$$d\xi_i(t)=\bar{a}_i(t,\xi)dt+\sum_{j=1}^{p_0}\sigma_{ij}(t,\xi)dw_i(t),\quad i=1,\quad ,p_0, \qquad (9)$$

$$d\xi_{(p_0+i)}(t)=\bar{b}_{p_0+i}(t,\xi)dt,\quad i=1,\quad ,n-p_0. \qquad (10)$$

где $\sigma(t,\xi)=(\sigma_{ij}(t,\xi))_{i,j=1,2,\ ,p_0}$ матрица размера $p_0\ \ p_0$, $\bar{a}(t,\xi)=(\bar{a}_i(t,\xi))_{i=1,2,\ ,p_0}$ вектор, $\bar{b}(t,\xi)=(\bar{b}_i(t,\xi))_{i=p_0+1,p_0+2,\ ,n-p_0}$ вектор. Решение системы (1) является диффузионным Марковским процессом с коэффициентами

$$A(t,\xi)=\sigma(t,\xi)\sigma^T(t,\xi),\quad \bar{B}(t,\xi).$$

Решение начально-краевой задачи (1) допускает следующее вероятностное представление:

$$u(t,x)=E_{t,x}\left(\varphi(\xi_t(\tau_{\partial V}))y(\tau_{\partial V})-z_t(\tau_{\partial V})\right). \qquad (11)$$

где $\varphi(\xi_t(s))$, $z_t(s)$, $y_t(s)$, $s\ \ [t,T]$ – решение нижеследующей системы стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$\begin{aligned} d\xi_s &= b(s,\xi_s)ds+\Sigma(s,\xi_s)dw_s, \quad \xi_0=\xi(0);\\ dy_s &= v(s,\xi_s)y(s,\xi_s)ds, \qquad y_0=1; \qquad (12)\\ dz_s &= f(s,\xi_s)y(s,\xi_s)ds, \qquad z_0=0. \end{aligned}$$

IV.Алгоритмы конструирования оценки решения и численные эксперименты. Приводим алгоритмы конструирования оценки решений задач, приведенных в предыдущих параграфах. Анализируем стандартные ошибки в зависимости от количества траектории, построим 99.7% доверительный интервал оценки. В целях повышения эффективности алгоритмов для моделирования решений системы стохастических дифференциальных уравнений используется способ блочных параллельных вычислений. Исследуем зависимости эффективности алгоритмов от количества процессов в параллельном вычислении. В качестве примеров рассматриваются краевые задачи управления финансовыми инструментами.

1. Ввести параметры уравнения, матрицы $A_0,B,\bar{A}$, точку (x,t), количество траектории, ошибка.

Asian Journal of Technology and Applied Sciences
ISSN: 2301-xxxx (online) | IF: 10.01 | Vol: 1, issue 1
Available: http://asiansciencejournal.org

2. Построение матрицы $A(x,t), \overline{B}(x,t)$ по формулам (1), (2).

3. Нахождение матрицы, удовлетворяющей соотношению $A(x,t) = \sigma(x,t)\ \ x\sigma(x,t)^T$.

4. Численное моделирование решения системы стохастических уравнений (12).

5. Конструирование оценки функционалов, определяющих вероятность предсказания решений задачи.

6. Вычисление статистических числовых характеристик, построенных оценок, среднее значение, дисперсия, среднее квадратичное отклонение, стандартные ошибки и т.д.

7. Вывод основных числовых статистических характеристик.

8. Анализ полученных результатов.

V.Численный результат: Как известно, цена азиатского плавающего опциона купли с арифметическим средним $u(t,x_1,x_2)$ является решением следующего ультрапараболического уравнения [7]:

$$\frac{\partial u(t,x_1,x_2)}{\partial t} + rx_1\frac{\partial u(t,x_1,x_2)}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\sigma^2 x_1^2\frac{\partial^2 u(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2} +$$

$$+x_1\frac{\partial u(t,x_1,x_2)}{\partial x_2} = ru(t,x_1,x_2)$$

удовлетворяющие граничное условие

$$V(T,x_1,x_2) = \max\ \ x_1(T) - \frac{x_2(T)}{T}, 0\ \ = \varphi(T,x_1,x_2)$$

Для рассматриваемого случая соответствующая система стохастических дифференциальных уравнений, которая имеет следующий вид:

$$d\xi_1(t) = r\xi_1 dt + \sigma\xi_1 dw_1(t), \quad \xi_1(0) = \xi_{10},$$
$$d\xi_2(t) = \xi_1 dt, \qquad\qquad \xi_2(0) = \xi_{20},$$
$$dz_t = ru(t,\xi_1,\xi_2)dt, \qquad\qquad z_0 = 0.$$

Результаты численного эксперимента со следующими параметрами:

$\xi_1(0) = 1000$, $\sigma = 0.1$, $r = 0.1$, $\xi_2(0) = 1000$, $T = 1$ приводятся в таблице 2.1, а также в графических представлениях (Рис (2.1), (2.2)) .

Asian Journal of Technology and Applied Sciences
ISSN: 2301-xxxx (online) | IF: 10.01 | Vol: 1, issue 1
Available: http://asiansciencejournal.org

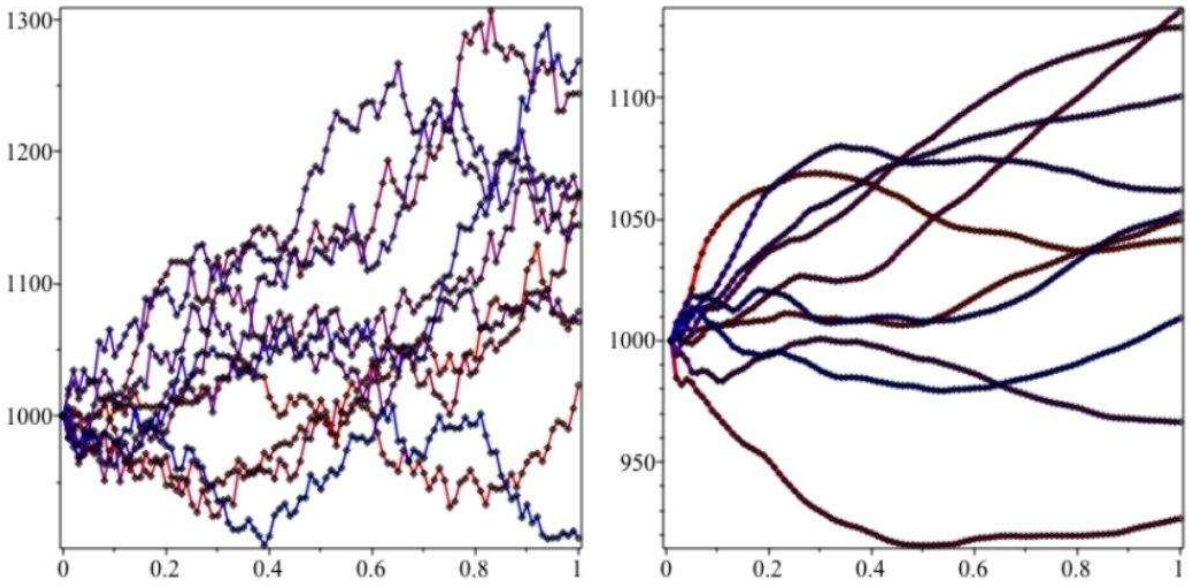


Рисунок 2.1. Численное моделирование $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)/t$ *для решения задача*

Asian Journal of Technology and Applied Sciences
ISSN: 2301-xxxx (online) | IF: 10.01 | Vol: 1, issue 1
Available: http://asiansciencejournal.org

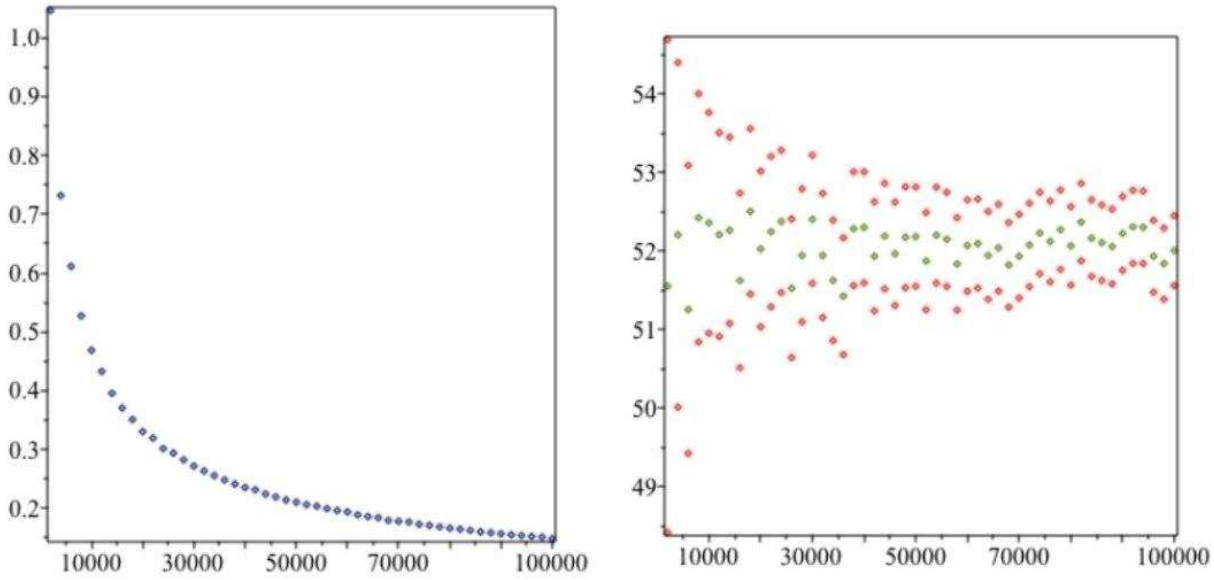


Рисунок 2.2. Зависимость стандартной ошибки и 99.7% доверительного интервала от числа траектории для решения задача

Таблица 2.1. Численный результат для решения задач

Число траектории	Оценка $u(x_1, x_2, t)$	Стандартная ошибка
2000	51.55454730	1.046472197
10000	52.36062451	0.4688541398
70000	51.93567003	0.1780196841
80000	52.06719722	0.1663433298
86000	52.10819572	0.1601856630
88000	52.05948218	0.1586602736
90000	52.22530660	0.1567718761
92000	52.31026265	0.1551142961
94000	52.30460908	0.1538079204
96000	51.93476265	0.1524725040
98000	51.84185444	0.1512007131
100000	52.00735506	0.1484322390

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ермаков С. М., Расулов. А. С. Бакоев М. Т, Веселовская А. Я. Избранные алгоритмы метода Монте- Карло. Ташкент: Университет. 1992, 130 с.
2. Ермаков С. М., Некруткин В. В., Сипин А. А.Случайные поцессы для решения классических уравнени математической физики. М.: Наука, 1984, 206 с.
3. Купцов Л.П. О свойстве среднего для обобщенного уравнения А.Н. Колмогорова I. Дифф. Уравнения. 1983, Т. XIX, №2, с. 285-304.
4. Кушнер Г. Дж. Вероятностные методы аппроксимации стохастических задачах управления и теории еллиптических уравнения. Москва. Наука. 1985.222 с.
5. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Ситатистика случайных процессов. М.: Наука, 1975, 696 с.
6. Мильштейн Г. Н. Слабая аппроксимация решений систем стохастических дифференциалних уравнений. Теория вероятностей и ее применения. 1985. Т.XXX, ВЫП.4. С. 706-721.
7. Мильштейн Г. Н. Решение первой краевой задачи для уравнений параболического типа с помощью интегрирования стохастических дифференциалних уравнений. Теория вероятностей и ее применения. Т.40. вып.3, 1995. С.657-665.
8. Расулов А. С. Бакоев М. Т. Рашение смешанной задачи для некоторых квазилинейных параболических уравнений методы Монте-Карло.// Тез. Докл. I-й Всемирн. Конгр. Обшества Бернулли 7-14 сентября. 1986 Г. Ташкент. С 473.
9. Сабельфельд К. К. Методи Монте-Карло в краевых задачах. Новосибирск. Наука. 1989,280 с.
10. Сабельфельд К. К. Вероятностные представление для систем эллиптических уравнений // Докл.РАН. 1995. т.341, №1 , с.594-598.
11. Тожиев Т. Х. Стохастические методы аппроксимации решения первой краевой задачи для обобщенного уравнения неизотропной диффузии. Деп.в ГФ НТИ ГКНТ № 2654-Уз 97.