Asian Journal of Technology and Applied Sciences
ISSN: 2301-xxxx (online) | IF: 10.01 | Vol: 1, issue 1
Available: http://asiansciencejournal.org

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ НЕИЗОТРОПНОЙ ДИФФУЗИИ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Тожиев Тохир Халимович
ФерГУ, доцент кафедры
информационных технологий
кандидат физико- математических наук

Аннотация: В работе исследуется задача Коши для обобщённого уравнения неизотропной диффузии. построению диффузионного процесса, конструированию системы стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), численному моделированию решений СДУ, согласованному с процессом, вероятностному представлению решений, построению несмещенных оценок для решения начально-краевых задач и задачи Коши, связанных с ультрапараболическими уравнениями.

Ключевые слова: задача Коши, неизотропная диффузия, марковская цепь, метод Монте-Карло.

Введение. Как известно, уравнения Колмогорова для диффузионных процессов устанавливают связь между Марковскими процессами и дифференциальными операторами второго порядка с соответствующими диффузионными коэффициентами процесса ([5],[6],[10],[1-3]).

Рассмотрим дифференциальный оператор типа

$$L := \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{p_0} \overline{a}_i(t,x)\partial_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_i\partial_{x_j}, \qquad (1.1)$$

где (t,x) R R^n, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, 1 p_0 n.

Предположим, выполняются следующие условия:

1. Матрица $A_0(x,t)=(a_{ij}(t,x))_{i,j=1,...,p_0}$ симметрична и равномерно положительно определённая в R^{p_0}, коэффициенты $a_{ij}(t,x)=a_{ji}(t,x)$ непрерывные ограниченные функции, а также существует положительная константа μ такая, что

$$\frac{|\eta|^2}{\mu} \quad \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}(t,x)\eta_i\eta_j \quad \mu|\eta|^2, \quad \eta \quad R^{p_0}. \qquad (1.2)$$

2. Матрица $B=(b_{ij})$ с постоянными константами имеет следующий блочный вид:

$$B = \begin{matrix} 0 & B_1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & B_r \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{matrix}, \qquad (1.3)$$

Asian Journal of Technology and Applied Sciences
ISSN: 2301-xxxx (online) | IF: 10.01 | Vol: 1, issue 1
Available: http://asiansciencejournal.org

где B_j матрица размера $(p_{j-1} \quad p_j)$ с рангом p_j, здесь $p_0 \quad p_1 \qquad p_r \quad 1$, $p_0 + p_1 + \quad + p_r = n$.

Если нам удастся построить диффузионный процесс, т. е. семейство мер $P_{s,x}$ с диффузионными коэффициентами, входящими в правую часть (1.1), то решения многих задач, содержащих дифференциальный оператор L, можно записать в виде $E_{t,x}F(t,\xi_t(\,))$, где $F(t,x(\,))$ при фиксированном t — некоторая функция, определенная на пространстве непрерывных функций $x(\,)$ и принимающих значения из R^n. Это и есть вероятностное представление решения. С помощью такого представления, используя свойства случайного процесса, можно получать результаты о некоторых свойствах решений. Кроме того, в теории вероятностей есть известные методы построения диффузионных процессов $([5],[6],[7])$. Поэтому формулы такого вида могут использоваться для вычисления значений самого решения поставленной задачи. Введём матрицу размера $(n \quad n)$ в блочном виде

$$A(t,x) = \begin{matrix} A_0(t,x) & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}, \qquad (1.4)$$

и вектор

Asian Journal of Technology and Applied Sciences
ISSN: 2301-xxxx (online) | IF: 10.01 | Vol: 1, issue 1
Available: http://asiansciencejournal.org

$$\bar{B}(t,x)=\begin{matrix}\bar{a}_1(t,x)\\ \bar{a}_2(t,x)\\ \vdots\\ \bar{a}p_0(t,x)\\ x_1\sum_{j=p_0+1}^{p_0+p_1} b_{1j}\\ x_2\sum_{j=p_0+1}^{p_0+p_1} b_{2j}\\ \vdots\\ x_{p_0}\sum_{j=p_0+1}^{p_0+p_1} b_{p_0 j}\\ x_{p_0+1}\sum_{j=p_0+p_1+1}^{p_0+p_1+p_2} b_{(p_0+1)j}\\ x_{p_0+2}\sum_{j=p_0+p_1+1}^{p_0+p_1+p_2} b_{(p_0+2)j}\\ \vdots\\ x_{p_0+p_1}\sum_{j=p_0+p_1+1}^{p_0+p_1+p_2} b_{(p_0+p_1)j}\\ \vdots\\ x_{n-p_0}\sum_{j=p_0+p_1+\ +p_{r-1}+1}^{n} b_{(n-p_0)j}\end{matrix}, \qquad (1.5)$$

Тогда оператор L можно переписать

$$L:=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\partial_{x_i} \qquad (1.6)$$

где $b_i(t,x)$ элементы вектора $B(t,x)$

Постановка задачи. В данном работе L дифференциальный оператор, определяемый равенством (1.1). Относительно функций $a_{ik}(t,x)$, $b_i(t,x)$ будем предполагать, что они ограничены и достаточно гладкими, так что решение рассматриваемых задач существует и единственно.

Пусть $T>0$. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)+Lu(t,x)=f(t,x),\quad t<T,\quad x\quad R^n,\\ &u(T,x)=\varphi(x)\end{aligned} \qquad (1.7)$$

Asian Journal of Technology and Applied Sciences
ISSN: 2301-xxxx (online) | IF: 10.01 | Vol: 1, issue 1
Available: http://asiansciencejournal.org

Краевое условие задается на гиперплоскости $t = T$, функции $f(t,x)$ и $\varphi(x)$ ограниченны и непрерывны. Существует теорема для решения задачи с обычным параболическим уравнением (см. [1], [5], [10]). Можно сформулировать аналогичную теорему для решений задачи (1.7).

Теорема. Пусть $\xi_t(\ )$ — диффузионный Марковский процесс с диффузионными коэффициентами $A(t,x)$ и $B(t,x)$, которые в естественном базисе R^n имеют координаты b_k и матрицу a_{ik}. Если $P_{s,x}$ обозначает соответствующую процессу вероятность, то

$$u(t,x) = E_{t,x}\varphi(\xi_t(T)) - E_{t,x}\int_s^T f(s,\xi_t(s))ds \qquad (1.8)$$

Доказательство. Покажем, что для всех $0 \quad s < t < T$ и $x \quad X$ случайный процесс

$$\zeta(t) = u(t,\xi_s(t)) - \int_s^T f(\tau,\xi_s(\tau))d\tau$$

является мартингалом относительно меры $P_{s,x}$. Имеем при $t+h \quad T$

$$E_{s,x}\left(\zeta(t+h) - \zeta(t) / \ {}_t^s\right) =$$

$$= E_{s,x}\left(u\left(t+h,\xi_s(t+h)\right) - u\left(t,\xi_s(t)\right) / \ {}_t^s\right) - E_{s,x}\int_t^{t+h} f\left(\tau,\xi_s(\tau)\right)d\tau / \ {}_t^s \ =$$

$$= E_{s,x}\left(u(t,\xi_s(t))h + \left(u(t,\xi_s(t)), \overline{B}(t,\xi_s(t))\right)h + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}Spu_{xx}\left(t,\xi_s(t)\right)A\left(t,\xi_s(t)\right)h - hf\left(t,\xi_s(t)\right) / \ {}_t^s + o(h)\right) = o(h)$$

Если $0 \quad s < t < u \quad T$, $h = \dfrac{u-t}{n}$, то, суммируя равенства

$$E_{s,x}(\zeta(t+kh) - \zeta(t+(k-1)h)) / \ {}_t^s = o(h), \quad k = 1, \quad ,n,$$

и затем берём условное математическое ожидание относительно ${}_t^s$, получим

$$E_{s,x}(\zeta(u) - \zeta(t)) / \ {}_t^s = n \ o(h) = \frac{u-t}{h} \ o(h).$$

После перехода к пределу при $h \to 0$ убеждаемся, что $\zeta(t)$ – мартингал.

Так как $\zeta(T) = \varphi(\xi_s(T))$, то

$$E_{s,x}(\varphi(\xi_s(T))) = E_{s,x}\zeta(T) = E_{s,x}\zeta(s) = E_{s,x}u(s,\xi_s(s)) - E_{s,x}\int_s^T f(\tau,\xi_s(\tau))d\tau$$

Из этой формулы получаем при $s = t$ (1.8), так как $E_{s,x}u(s,\xi_s(s)) = u(s,x)$.

III.Моделирование Марковских процессов согласованным с вероятностным представлением Моделирование решений стохастических дифференциальных уравнений является одним из мощных средств исследования случайных процессов ([5], [6]). В данном параграфе исследуем диффузионные процессы как решения стохастических дифференциальных уравнений. Рассмотрим системы стохастических дифференциальных уравнений, которым удовлетворяет диффузионный процесс $\xi(t)$.

Asian Journal of Technology and Applied Sciences
ISSN: 2301-xxxx (online) | IF: 10.01 | Vol: 1, issue 1
Available: http://asiansciencejournal.org

$$d\xi_i(t) = \bar{a}_i(t,\xi)dt + \sum_{j=1}^{p_0} \sigma_{ij}(t,\xi)dw_i(t), \quad i = 1, \quad , p_0, \qquad (1.9)$$

$$d\xi_{(p_0+i)}(t) = \bar{b}_{p_0+i}(t,\xi)dt, \quad i = 1, \quad , n - p_0. \qquad (1.10)$$

где $\sigma(t,\xi) = (\sigma_{ij}(t,\xi))_{i,j=1,2,\ ,p_0}$ матрица размера $p_0 \quad p_0$, $\bar{a}(t,\xi) = (\bar{a}_i(t,\xi))_{i=1,2,\ ,p_0}$ вектор, $\bar{b}(t,\xi) = (\bar{b}_i(t,\xi))_{i=p_0+1,p_0+2,\ ,n-p_0}$ вектор. Решение системы (1.9) является диффузионным Марковским процессом с коэффициентами

$$A(t,\xi) = \sigma(t,\xi)\sigma^T(t,\xi), \quad \bar{B}(t,\xi).$$

Решение задачи (1.7) может быть представлено в виде

$$u(t,x) = E_{t,x}\{\varphi(\xi_t(T)) - z_t(T)\}, \qquad (1.11)$$

где $\xi_t(s), z_t(s), s \quad [t,T]$ — решение системы стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$\begin{aligned} d\xi_i(t) &= \bar{a}_i(t,\xi)dt + \sum_{j=1}^{p_0} \sigma_{ij}(t,\xi)dw_i(t), & \xi_i(0) &= \xi_{i0}, \quad i = 1, \quad , p_0, \\ d\xi_{(p_0+i)}(t) &= \bar{b}_{p_0+i}(t,\xi)dt, & \xi_i(0) &= x_{i0}, \quad i = 1, \quad , n - p_0, \\ dz_s &= f(s,\xi_s)ds, & z_0 &= 0. \end{aligned}$$

(1.12)

IV Алгоритмы конструирования оценки решения и численные эксперименты. Приводим алгоритмы конструирования оценки решений задач, приведенных в предыдущих параграфах. Анализируем стандартные ошибки в зависимости от количества траектории, построим 99.7% доверительный интервал оценки. В целях повышения эффективности алгоритмов для моделирования решений системы стохастических дифференциальных уравнений используется способ блочных параллельных вычислений. Исследуем зависимости эффективности алгоритмов от количества процессов в параллельном вычислении. В качестве примеров рассматриваются краевые задачи управления финансовыми инструментами.

1. Ввести параметры уравнения, матрицы $A_0, B, \bar{A}$, точку (x,t) , количество траектории, ошибка.

2. Построение матрицы $A(x,t), \bar{B}(x,t)$ по формулам (1.4), (1.5).

3. Нахождение матрицы, удовлетворяющей соотношению $A(x,t) = \sigma(x,t) \quad x\sigma(x,t)^T$.

4. Численное моделирование решения системы стохастических уравнений (1.9).

5. Конструирование оценки функционалов, определяющих вероятность предсказания решений задачи.

6. Вычисление статистических числовых характеристик, построенных оценок, среднее значение, дисперсия, среднее квадратичное отклонение, стандартные ошибки и т.д.

7. Вывод основных числовых статистических характеристик.

8. Анализ полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ермаков С. М Расулов. А.С. Бакоев М. Т.Веселовская А. Я. Избранные алгоритмы метода Монте- Карло. Ташкент: Университет. 1992, 130 с.
2. Ермаков С. М., Некруткин В. В, Сипин А. А.Случайные поцессы для решения классических уравнени математической физики. М.: Наука, 1984, 206 с.
3. Купцов Л.П. О свойстве среднего для обобщенного уравнения А.Н. Колмогорова I. Дифф. Уравнения. 1983, Т. XIX, №2, с. 285-304.
4. Кушнер Г. Дж. Вероятностные методы аппроксимации стохастических задачах управления и теории еллиптических уравнения. Москва. Наука. 1985.222 с.
5. Липцер Р. Ш, Ширяев А. Н. Ситатистика случайных процессов. М.: Наука, 1975, 696 с.
6. Мильштейн Г. Н. Слабая аппроксимация решений систем стохастических дифференциалних уравнений. Теория вероятностей и ее применения. 1985. Т.XXX, ВЫП.4. С. 706-721.
7. Мильштейн Г. Н. Решение первой краевой задачи для уравнений параболического типа с помощью интегрирования стохастических дифференциалних уравнений. Теория вероятностей и ее применения. Т.40. вып.3, 1995. С.657-665.
8.Расулов А. С. Бакоев М. Т. Рашение смешанной задачи для некоторых квазилинейных параболических уравнений методы Монте-Карло. Тез. Докл. I-й Всемирн. Конгр. Обшества Бернулли 7-14 сентября. 1986 Г. Ташкент. С 473.
9.Сабельфельд К. К. Методи Монте-Карло в краевых задачах. Новосибирск. Наука. 1989,280 с.
10. Сабельфельд К. К. Вероятностные представление для систем эллиптических уравнений // Докл.РАН. 1995. т.341, №1, с.594-598.
11. Тожиев Т. Х. Стохастические методы аппроксимации решения первой краевой задачи для обобщенного уравнения неизотропной диффузии. Деп.в ГФ НТИ ГКНТ № 2654-Уз 97.