Asian Journal of Technology and Applied Sciences
ISSN: 2301-xxxx (online) | IF: 10.01 | Vol: 1, issue 1
Available: http://asiansciencejournal.org

УДК 517.956.6

ПОСТАНОВКА И ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В СМЕШАННОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

М. Мамажонов
профессор Кокандского государственного университета

Здесь рассматривается следующее уравнение третьего порядка параболо-гиперболического типа вида

$$a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\ \ (Lu)=0 \qquad (1)$$

в треугольной области G плоскости xOy, где

$$Lu=\begin{array}{l} u_{xx}-u_y,\ (x,y)\quad G_1,\\ u_{xx}-u_{yy},\ (x,y)\quad G_i\ (i=2,3,4),\end{array}$$

$a,b,c\quad R$, $\gamma=b/a$, $-\quad<\gamma<-1$, а $G=G_1\quad G_2\quad G_3\quad G_4\quad J_1\quad J_2\quad J_3$, здесь G_1- прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2, G_3 и G_4- треугольники с вершинами в точках A, B, $C(1/2,-1/2)$; A, $D(-1,1)$, A_0 и B, $E(2,1)$, B_0 соответственно; J_1, J_2 и J_3- открытые отрезки с вершинами в точках A, B; A, A_0 и B, B_0 соответственно.

Эта работа является продолжением работы [1], в которой поставлен один класс краевых задач для уравнения (1) при произвольных постоянных коэффициентов $a,b,c\quad R$ и исследован случай 1° ($a\quad 0,\ b=0$). В работах [2,3] исследован случай 2° ($a=0,\ b\quad 0$), а в этой работе рассматривается случай 7° при $-\quad<\gamma<-1$.

Так как $\gamma=b/a$, $-\quad<\gamma<-1$, то без ограничения общности можно полагать $a<0$, $b>0$. Тогда для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача-1. Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$ и в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x и u_y – непрерывны в G вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u\big|_{BC}=\psi_1(x),\ 1/2\quad x\quad 1, \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC}=\psi_2(x),\ 1/2\quad x\quad 1, \qquad (3)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_3(x),\ 0\quad x\quad 1/2, \qquad (4)$$

$$u\big|_{AF_1}=\psi_4(x),\ -1/2\quad x\quad 0, \qquad (5)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AD}=\psi_5(x),\ -1\quad x\quad 0, \qquad (6)$$

Asian Journal of Technology and Applied Sciences
ISSN: 2301-xxxx (online) | IF: 10.01 | Vol: 1, issue 1
Available: http://asiansciencejournal.org

$$u\big|_{A_0D} = f_1(x),\ -1 \quad x \quad 0, \qquad (7)$$

$$u\big|_{B_0E} = f_2(x),\ 1 \quad x \quad 2, \qquad (8)$$

$$u\big|_{EF_2} = \psi_6(x),\ 3/2 \quad x \quad 2, \qquad (9)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BE} = \psi_7(x),\ 1 \quad x \quad 2 \qquad (10)$$

и 4) следующим условиям склеивания:

$$u(x,+0) = u(x,-0) = \tau_1(x),\ 0 \quad x \quad 1, \quad (11)$$

$$u_y(x,+0) = u_y(x,-0) = \nu_1(x),\ 0 \quad x \quad 1, (12)$$

$$u_{yy}(x,+0) = u_{yy}(x,-0) = \mu_1(x),\ 0 < x < 1, (13)$$

$$u(+0,y) = u(-0,y) = \tau_2(y),\ 0 \quad y \quad 1, (14)$$

$$u_x(+0,y) = u_x(-0,y) = \nu_2(y),\ 0 \quad y \quad 1, \qquad (15)$$

$$u_{xx}(+0,y) = u_{xx}(-0,y) = \mu_2(y),\ 0 < y \quad 1, \qquad (16)$$

$$u(1+0,y) = u(1-0,y) = \tau_3(y),\ 0 \quad y \quad 1, \qquad (17)$$

$$u_x(1+0,y) = u_x(1-0,y) = \nu_3(y),\ 0 \quad y \quad 1, \qquad (18)$$

$$u_{xx}(1+0,y) = u_{xx}(1-0,y) = \mu_3(y),\ 0 < y \quad 1. \qquad (19)$$

Здесь $\psi_i\ (i=\overline{1,7}), f_j\ (j=1,2)$ – заданные достаточно гладкие функции, а $\tau_i, \nu_i, \mu_i\ (i=1,2,3)$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, n – внутренняя нормаль к прямой $x+y=0$ или $x-y=1$, $F_1(-1/2,1/2)$, $F_2(3/2,1/2)$.

Теорема. Если $\psi_1 \quad C^3[1/2,1]$, $\psi_2 \quad C^2[1/2,1]$, $\psi_3 \quad C^2[1/2,1]$, $\psi_4 \quad C^3[-1/2,0]$, $\psi_5 \quad C^2[-1,0]$, $\psi_6 \quad C^3[3/2,2]$, $\psi_7 \quad C^2[1,2]$, $f_1 \quad C^3[-1,0]$, $f_2 \quad C^3[1,2]$, причем выполняются условия согласования $\psi_5(0) = \psi_3(0)$, $\psi_2(1) = \psi_7(1)$, $f_2(2) = \psi_6(2)$, $\psi_2(1/2) = -\psi_3(1/2)$, то задача-1 допускает единственное решение.

Доказательство. Теорему докажем методом построения решения. Здесь мы даем лишь идею доказательства этой теоремы. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_1(bx-ay)e^{-\frac{c}{b}y},\ (x,y) \quad G_1, (20)$$

$$u_{ixx} - u_{iy} = \omega_i(bx-ay)e^{-\frac{c}{b}y},\ (x,y) \quad G_i\ (i=2,3,4), \qquad (21)$$

где введено обозначение $u(x,y) = u_i(x,y),\ (x,y) \quad G_i\ (i=\overline{1,4})$, причем $\omega_i(bx-ay)\ (i=\overline{1,4})$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции.

Нам следует разделить области $G_i\ (i=3,4)$ по две части каждой с помощью открытым отрезкам A_0F_1 и B_0F_2. Тогда уравнение (21) $(i=3,4)$ можно переписать в виде

$$u_{ikxx} - u_{iky} = \omega_{ik}(bx-ay)e^{-\frac{c}{b}y},\ (x,y) \quad G_{ik}\ (i=3,4;\ k=1,2), \qquad (22)$$

где введены обозначения $u_i(x,y) = u_{ik}(x,y)$, $\omega_i(bx-ay) = \omega_{ik}(bx-ay)$, $(x,y) \quad G_{ik}\ (i=3,4;\ k=1,2)$.

Asian Journal of Technology and Applied Sciences
ISSN: 2301-xxxx (online) | IF: 10.01 | Vol: 1, issue 1
Available: http://asiansciencejournal.org

Сначала рассмотрим область G_2 . Записывая решение уравнения (21) $(i=2)$, удовлетворяющее условиям (11), (12) и подставляя это решение в условие (3) и (4) после некоторых преобразований, находим функцию $\omega_2(bx-ay)$ полностью.

Подставляя формулу решения $u_2(x,y)$ в условие (2), имеем первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$. Переходя в уравнениях (1) и (21) $(i=2)$ к пределу при $y\to 0$, имеем еще две соотношения между неизвестными функциями $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$. Исключая из этих трех соотношений функции $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$ и интегрируя полученное уравнение от 1 до x, приходим к дифференциальному уравнению второго порядка относительно $\tau_1(x)$. Решая это уравнении при известных трех условиях, находим функцию $\tau_1(x)$.

Далее, переходим в область G_{41}. Записывая решение уравнения (22) $(i=4;\ k=1)$, удовлетворяющего условиям (17), (18) и подставляя это решение в условие (10) после некоторых преобразований, находим функцию $\omega_{41}(bx-ay)$ в промежутке $b \quad bx-ay \quad \frac{3b-a}{2}$.

Теперь переходим в область G_{42}. Записывая решение уравнения (22) $(i=4;\ k=2)$, удовлетворяющего условиям (8) и $u_{42}(x,1)=\nu_5(x)$ (где $\nu_5(x)$ неизвестная пока функция) и подставляя это решение в условие (10) после некоторых преобразований, находим функцию $\overline{\omega}_{42}(bx-ay)$ в промежутке $\frac{3b-a}{2} \quad bx-ay \quad 2b-a$.

Далее, пользуясь условием $\left.\frac{\partial u_{42}}{\partial x}+\frac{\partial u_{42}}{\partial y}\right|_{y=2-x} = \left.\frac{\partial u_{41}}{\partial x}+\frac{\partial u_{41}}{\partial y}\right|_{y=2-x}$, после некоторых преобразований, находим функцию $\overline{\overline{\omega}}_{42}(bx-ay)$ в промежутке $b-a \quad bx-ay \quad \frac{3b-a}{2}$.

Итак, мы нашли функцию $\omega_{42}(bx-ay)$ по формуле

$$\omega_{42}(bx-ay)=\begin{cases}\overline{\omega}_{42}(bx-ay), & \frac{3b-a}{2} \quad bx-ay \quad 2b-a,\\ \overline{\overline{\omega}}_{42}(bx-ay), & b-a \quad bx-ay \quad \frac{3b-a}{2}.\end{cases}$$

Теперь подставляя решение $u_{42}(x,y)$ в условие (9), находим функцию $\nu_5(x)$ в промежутке $1 \quad x \quad 2$.

Таким образом, мы определили функцию $u_{42}(x,y)$. Если введем обозначению $u_{42}(x,2-x)=h_2(x)$, то для определения функции $u_{41}(x,y)$ будем иметь условию

$u_{41}(x,y)\big|_{y=2-x}=h_2(x)$.

Подставляя решение $u_{41}(x,y)$ в это условие, имеем соотношение

$$\nu_3(x)=\tau_3(y)+\beta_2(y),\ 0 \quad y \quad 1, \quad (23)$$

где $\beta_2(y)-$ известная функция.

Asian Journal of Technology and Applied Sciences
ISSN: 2301-xxxx (online) | IF: 10.01 | Vol: 1, issue 1
Available: http://asiansciencejournal.org

Переходя в уравнении (20) к пределу при $y \to 0$, находим

$\omega_{11}(bx) = \tau_1(x) - \nu_1(x)$,

где положено $\omega_1(bx-ay) = \begin{matrix} \omega_{11}(bx-ay), \text{ если } 0 \quad bx-ay \quad b, \\ \omega_{12}(bx-ay), \text{ если } b \quad bx-ay \quad b-a. \end{matrix}$

Далее, переходя в уравнениях (20) и (22) $(i=3;\ k=1)$ к пределу при $x \to 0$, имеем две соотношения относительно функций $\tau_2(y)$, $\mu_2(y)$, $\omega_{31}(-ay)$. Исключая из этих двух соотношений функцию $\mu_2(y)$ после некоторых преобразований, находим функцию $\overline{\omega}_{31}(bx-ay)$ через функции $\tau_2(y)$ в промежутке $0 \quad bx-ay \quad -a$.

А переходя в уравнениях (20) и (22) $(i=4;\ k=1)$ к пределу при $x \to 1$, имеем еще две соотношения относительно $\tau_3(y)$, $\mu_3(y)$, $\omega_{12}(b-ay)$. Исключая из этих двух уравнений функцию $\mu_3(y)$ и меняя аргумент $b-ay$ на $bx-ay$, находим функцию $\omega_{12}(bx-ay)$ через функции $\tau_3(y)$ в промежутке $b \quad bx-ay \quad b-a$.

Теперь переходим в области G_{31}. Записывая решение уравнения (22) $(i=3;\ k=1)$, удовлетворяющее условиям (14), (15) и подставляя это решение в условие (6) после некоторых преобразований, находим функцию $\overline{\overline{\omega}}_{31}(bx-ay)$ в промежутке $-\dfrac{b+a}{2} \quad bx-ay \quad 0$.

Далее, переходим в область D_{32}. Записывая решение уравнения (22) $(i=3;\ k=2)$, удовлетворяющее условиям (7) и $u_{32y}(x,1) = \nu_4(x)$ ($\nu_4(x)$ – неизвестная пока достаточно гладкая функция) и подставляя это решение в условие (6) после некоторых преобразований, находим функцию $\widetilde{\omega}_{32}(bx-ay)$ в промежутке $-(b+a) \quad bx-ay \quad -\dfrac{b+a}{2}$.

Теперь пользуясь из условия $\left.\dfrac{\partial u_{32}}{\partial x} - \dfrac{\partial u_{32}}{\partial y}\right|_{y=x+1} = \left.\dfrac{\partial u_{31}}{\partial x} - \dfrac{\partial u_{31}}{\partial y}\right|_{y=x+1}$,

после некоторых преобразований имеем

$\omega_{32}(bx-ay) = \omega_{31}(bx-ay), -\dfrac{b+a}{2} \quad bx-ay \quad -a$.

Таким образом, мы получили

$$\omega_{32}(bx-ay) = \begin{matrix} \widetilde{\omega}_{32}(bx-ay), -(b+a) \quad bx-ay \quad -\dfrac{b+a}{2}, \\ \overline{\overline{\omega}}_{31}(bx-ay), -\dfrac{b+a}{2} \quad bx-ay \quad 0, \\ \overline{\omega}_{31}(bx-ay), 0 \quad bx-ay \quad -a. \end{matrix}$$

Подставляя решение $u_{31}(x,y)$ в условие (5), после длинных вычислений и преобразований получим соотношение между функциями $\tau_2(y)$ и $\nu_2(y)$.

Теперь переходим в область G_1. Записывая решение уравнения (20), удовлетворяющего условиям (11), (14), (17) и дифференцируя это решение по x и

Asian Journal of Technology and Applied Sciences
ISSN: 2301-xxxx (online) | IF: 10.01 | Vol: 1, issue 1
Available: http://asiansciencejournal.org

устремляя x к нулю и к единице с учетом (23), выражений функций $\overline{\omega}_{31}(bx-ay)$, $\omega_{12}(bx-ay)$ и соотношения между функциями $\tau_2(y)$ и $\nu_2(y)$, после длинных вычислений и преобразований, получим систему двух интегральных уравнений Вольтера второго рода относительно неизвестных функций $\tau_2(y)$ и $\tau_3(y)$:

$$\tau_2(y)+\int_0^y K_1(y,\eta)\tau_2(\eta)d\eta+\int_0^y K_2(y,\eta)\tau_3(\eta)d\eta=g_1(y), \tag{24}$$

$$\tau_3(y)+\int_0^y K_3(y,\eta)\tau_3(\eta)d\eta+\int_0^y K_4(y,\eta)\tau_2(\eta)d\eta=g_2(y), \tag{25}$$

где $K_1(y,\eta)$, $K_2(y,\eta)$, $K_3(y,\eta)$, $K_4(y,\eta)$, $g_1(y)$, $g_2(y)-$ известные функции, причем ядра $K_1(y,\eta)$ и $K_3(y,\eta)$ имеют слабую особенность (со степенью $1/2$), а остальные функции непрерывны. Поэтому система уравнений (24), (25) допускает единственное решение в классе непрерывных функций. Решая эту систему, находим функции $\tau_2(y)$ и $\tau_3(y)$ тем самым, и функции $\nu_2(y)$, $\nu_3(y)$, $\omega_{12}(bx-ay)$, $\overline{\omega}_{31}(bx-ay)$, $u_1(x,y)$, $u_{31}(x,y)$, $u_{41}(x,y)$.

Так как, функция $u_{31}(x,y)$ известна, то введя обозначение $u_{31}(x,x+1)=h_1(x)$, для нахождения функции $u_{32}(x,y)$ имеем условие $u_{32}(x,y)\big|_{y=x+1}=h_1(x)$. Подставляя решение $u_{32}(x,y)$ в это условие, после некоторых выкладок, находим функцию $\nu_4(x)$ в промежутке $-1 \quad x \quad 0$.

Таким образом, мы определили функцию $u_{32}(x,y)$ тем самым – и решение задачи 1 полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мамажонов М., Шерматова Х.М. О некоторых краевых задачах для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа. Научный вестник Наманганского государственного университета. Наманган, 2022, № 2, с. 41-51.

2. Мамажонов М., Шерматова Х.М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения. Сибирский журнал индустриальной математики, 2022, 25(3), 93-103.

3. Mamajonov M., Shermatova H.M. On a boundary value problem for a third-order equation of the parabolic-hyperbolic type in a triangular domain with three type change lines. ISSN 1990-4789, Journal of applied and industrial mathematics, 2022, Vol. 16, No. 3, pp. 481–489.